

Entwicklungsstufen des Rechnen Lernens

Prof. Dr. Annemarie Fritz-Stratmann
Universität Duisburg-Essen

Konzept

Vergleichen/
Vermehren &
Vermindern
Basis

ab Geburt

Menge

**Mengenvergleich
schätzend**

- gleich / ungleich
- mehr / weniger



Zahl


**Zahlwort(reih)e
aufsagen mit
Zählabsicht**

„Zwei“
„Eins“ „Drei“ „Vier“



Entwicklung TG

**Vermehren /
Vermindern (allg.)**



Es sind mehr
geworden

Konzept

Vergleichen/
Vermehrten &
Vermindern

Basis

Zählen

Stufe I

ab Geburt

3 – 4 ½ Jahre

Menge

**Mengenvergleich
schätzend**

- gleich / ungleich
- mehr / weniger



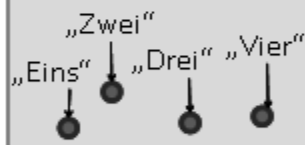
**Mengenvgl. über
1-zu-1-Zuordnung**

mehr / weniger

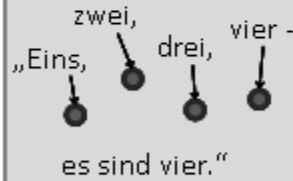


Zahl

**Zahlwort(reih)e
aufsagen mit
Zählabsicht**

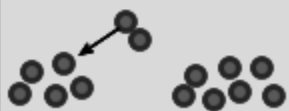


Aus- / Abzählen



Entwicklung TG

**Vermehrten /
Vermindern (allg.)**



Es sind mehr
geworden

**Operation = konkr.
(Zähl-)Handlung**

- zerlegen
- zusammensetzen
- Kompensation
- Kovarianz

Konzept

Vergleichen/
Verme­hren &
Vermin­dern

Basis

ab Geburt

Zählen

Stufe I

3 – 4 ½ Jahre

Mentaler
Zahlenstrahl

Stufe II

4 ½ - 5 ½ Jahre

Menge

Mengenvergleich
schätzend

- gleich / ungleich
- mehr / weniger

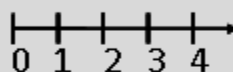


Mengenvgl. über
1-zu-1-Zuordnung

mehr / weniger



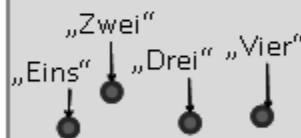
Mengenvgl. über
Zahlposition



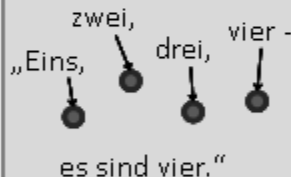
$2 < 3$, weil 3 hinter 2

Zahl

Zahlwort(reih)e
aufsa­gen mit
Zählabsicht

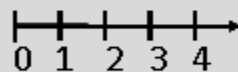


Aus- / Abzählen



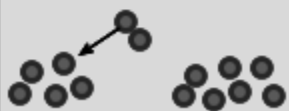
ZWR = ordinaler
Zahlenstrahl

wird kleiner ← → wird größer



Entwicklung TG

Verme­hren /
Vermin­dern (allg.)



Es sind mehr
geworden

Operation = konkr.
(Zähl-)Handlung

- zerlegen
- zusammensetzen
- Kompensation
- Kovarianz

Operation = abstr.
(Zähl-)Handlung

- zerlegen: Menge aufteilen; $a+b=?$
- zus.setzen $c-b=?$
- Kompensation
- Kovarianz

Konzept

Vergleichen/
Verme­hren &
Vermin­dern

Basis

Zählen

Stufe I

Mentaler
Zahlenstrahl

Stufe II

Kardinalität &
Zerlegbarkeit

Stufe III

ab Geburt

3 – 4 ½ Jahre

4 ½ - 5 ½ Jahre

5 ½ - 6 ½ Jahre

Menge

Mengenvergleich
schätzend

- gleich / ungleich
- mehr / weniger

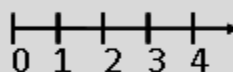


Mengenvgl. über
1-zu-1-Zuordnung

mehr / weniger



Mengenvgl. über
Zahlposition



$2 < 3$, weil 3 hinter 2

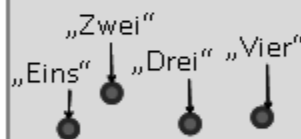
Kard. Mengenvgl.



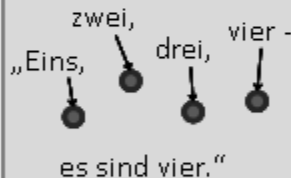
- $2 < 3$, weil in 2 weniger drin als in 3
- nächstes ZW hat kardinale Bedeutung

Zahl

Zahlwort(reih)e
aufsa­gen mit
Zählabsicht

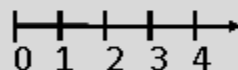


Aus- / Abzählen



ZWR = ordinaler
Zahlenstrahl

wird kleiner ← → wird größer



Zahl = aus
Einzelelementen
zusammengesetzte

Menge



Entwicklung TG

Verme­hren /
Vermin­dern (allg.)



Es sind mehr geworden

Operation = konkr.
(Zähl-)Handlung

- zerlegen
- zusammensetzen
- Kompensation
- Kovarianz

Operation = abstr.
(Zähl-)Handlung

- zerlegen: Menge aufteilen; $a+b=?$
- zus.setzen $c-b=?$
- Kompensation
- Kovarianz

Teilmen­gen-Op.
konkret-handelnd

- $a + ? = c$
- $c = a + ?$
- weiterzählen

Vergleichen/
Verme­hren &
Vermin­dern

Basis

Zählen

Stufe I

Mentaler
Zahlenstrahl

Stufe II

Kardinalität &
Zerlegbarkeit

Stufe III

Enthaltensein

Stufe IV

ab Geburt

3 – 4 ½ Jahre

4 ½ - 5 ½ Jahre

5 ½ - 6 ½ Jahre

6 ½ - 7 ½ Jahre

Mengenvergleich
schätzend

- gleich / ungleich
- mehr / weniger

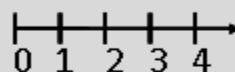


Mengenvgl. über
1-zu-1-Zuordnung

mehr / weniger



Mengenvgl. über
Zahlposition



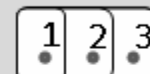
$2 < 3$, weil 3 hinter 2

Kard. Mengenvgl.



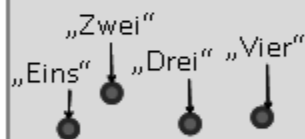
- $2 < 3$, weil in 2 weniger drin als in 3
- nächstes ZW hat kardinale Bedeutung

Mengenvgl. als
Klasseninklusion

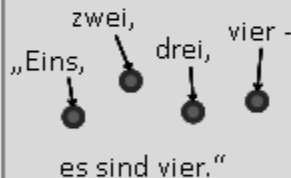


- $2 < 3$, da 2 in 3 enthalten
- Erhalt übergeordn. Klasse (3) trotz Zerleg.

Zahlwort(reih)e
aufsa­gen mit
Zählabsicht

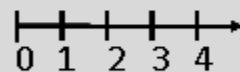


Aus- / Abzählen



ZWR = ordinaler
Zahlenstrahl

wird kleiner ← → wird größer



Zahl = aus
Einzeelementen
zusammengesetzte
Menge



Konstruktions-
prinzip Zahlreihe

- Zahlen werden jeweils um 1 mehr
- Mengenseriation

Verme­hren /
Vermin­dern (allg.)



Es sind mehr geworden

Operation = konkr.
(Zähl-)Handlung

- zerlegen
- zusammensetzen
- Kompensation
- Kovarianz

Operation = abstr.
(Zähl-)Handlung



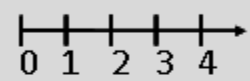

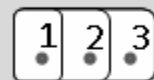
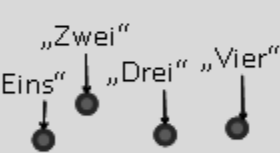
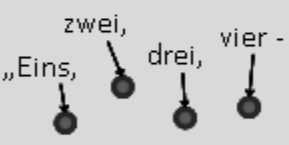
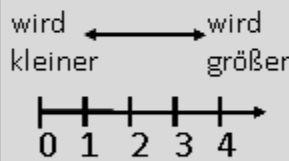

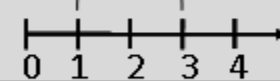

- zerlegen: Menge aufteilen; $a+b=?$
- zus.setzen $c-b=?$
- Kompensation
- Kovarianz

Teilmen­gen-Op.
konkret-handelnd

- $a + ? = c$
- $c = a + ?$
- weiterzählen

Vollständiges TG-
Verständnis
numerisch-verbal

- 2 abgeben. 3 bleiben übrig. Wie viele waren es?

Konzept	Vergleichen/ Verme­hren & Vermin­dern Basis	Zählen Stufe I	Mentaler Zahlenstrahl Stufe II	Kardinalität & Zerlegbarkeit Stufe III	Enthaltensein Stufe IV	Relationalität Stufe V
	ab Geburt	3 – 4 ½ Jahre	4 ½ - 5 ½ Jahre	5 ½ - 6 ½ Jahre	6 ½ - 7 ½ Jahre	ab 7 ½ Jahre
Menge	Mengenvergleich schätzend <ul style="list-style-type: none"> gleich / ungleich mehr / weniger 	Mengenvgl. über 1-zu-1-Zuordnung mehr / weniger 	Mengenvgl. über Zahlposition  $2 < 3$, weil 3 hinter 2	Kard. Mengenvgl.  <ul style="list-style-type: none"> $2 < 3$, weil in 2 weniger drin als in 3 nächstes ZW hat kardinale Bedeutung 	Mengenvgl. als Klasseninklusion  <ul style="list-style-type: none"> $2 < 3$, da 2 in 3 enthalten Erhalt übergeordn. Klasse (3) trotz Zerleg. 	Mengenvergleich als Differenzbestimmung Um wie viele mehr / weniger?
Zahl	Zahlwort(reih)e aussagen mit Zählabsicht 	Aus- / Abzählen  es sind vier.“	ZWR = ordinaler Zahlenstrahl 	Zahl = aus Einzelementen zusammengesetzte Menge 	Konstruktionsprinzip Zahlreihe <ul style="list-style-type: none"> Zahlen werden jeweils um 1 mehr Mengenseriation 	Relationalzahl = <ul style="list-style-type: none"> zählbare Einheit Abstand in Zahlreihe 2x Abstand 2: 
Entwicklung TG	Verme­hren / Vermin­dern (allg.)  Es sind mehr geworden	Operation = konkr. (Zähl-)Handlung <ul style="list-style-type: none"> zerlegen zusammensetzen Kompensation Kovarianz 	Operation = abstr. (Zähl-)Handlung <ul style="list-style-type: none"> zerlegen: Menge aufteilen; $a+b=?$ zus.setzen $c-b=?$ Kompensation Kovarianz 	Teil­men­gen-Op. konkret-handelnd <ul style="list-style-type: none"> $a + ? = c$ $c = a + ?$ weiterzählen 	Vollständiges TG-Verständnis numerisch-verbal <ul style="list-style-type: none"> 2 abgeben. 3 bleiben übrig. Wie viele waren es? 	Operation mit relationalem Bezug <ul style="list-style-type: none"> A und B haben zus. 10. A hat 2 mehr als B. Wie viele hat A, wie viele hat B?